

سلامت بخش

سایت تخصصی برق

www.power2.ir

reza@power2.ir

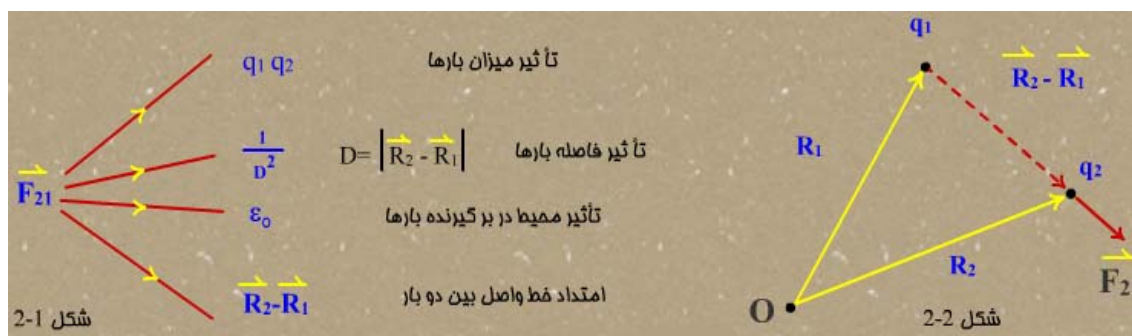
فصل دوم

میدان‌های الکتریکی ساکن Static Electric Fields

مبنای قوانین حاکم بر میدان‌های الکتریکی ساکن نیروی جاذبه یا دافعه بین بارهای الکتریکی می‌باشد که همان قانون کولمب است. افرادی که در این زمینه مطالعات و بررسی‌های علمی انجام داده‌اند: تالس، گیلبرت و نهایتاً افسر فرانسوی بنام کولمب می‌باشد که توانست اندازه‌گیری‌های دقیقی روی این نیرو انجام دهد.

قانون کولمب در فضای آزاد (خلأ) Free space

در آزمایش‌های بعمل آمده توسط کولمب به نتایج زیر در خصوص نیروی وارد بر یک بار الکتریکی ناشی از بار الکتریکی دیگر دست یافت: با توجه به وجود دو بار الکتریکی q_1 و q_2 که به ترتیب در موقعیت \vec{R}_1 و \vec{R}_2 قرار گرفته‌اند



$$\vec{F}_{21} \propto \frac{q_1 q_2}{\epsilon_0 |\vec{R}_2 - \vec{R}_1|^2} \frac{\vec{R}_2 - \vec{R}_1}{|\vec{R}_2 - \vec{R}_1|}$$

بنابراین:

$$\frac{\vec{R}_2 - \vec{R}_1}{|\vec{R}_2 - \vec{R}_1|} \text{ بردار واحد } \vec{R}_2 - \vec{R}_1 \text{ برابر است با:}$$

ضریب نفوذپذیری الکتریکی خلأ Electric permittivity coefficient of Free-space

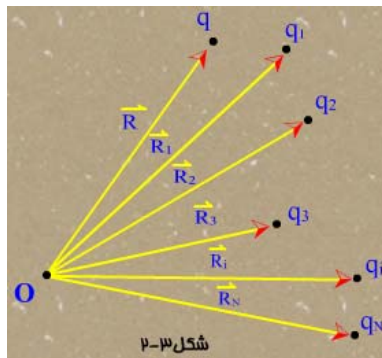
$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} = 8.85 \times 10^{-12} \left[\frac{F}{m} \right] \text{ یا } \left[\frac{Nm^2}{C^2} \right]$$

ضریب تناسب معادله محاسبه برای دستگاه اندازه‌گیری MKS یا SI برابر $\frac{1}{4\pi}$ می‌باشد.

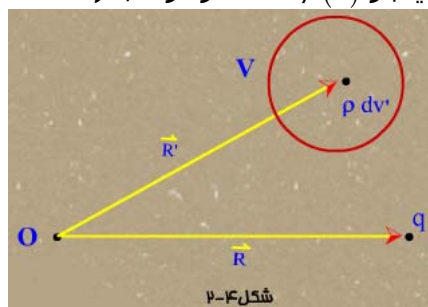
بنابراین

$$\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 |\vec{R}_2 - \vec{R}_1|^3} (\vec{R}_2 - \vec{R}_1)$$

بدلیل داشتن رابطه خطی نیروی فوق با میزان بارها، چنانچه چندین بار در فضای خلأ وجود داشته باشد می‌توان چنین نوشت:

برای N بار گسسته:

$$\vec{F}_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{qq_i(\vec{R} - \vec{R}_i)}{|\vec{R} - \vec{R}_i|^3}$$

و برای یک بار پیوسته به چگالی بار $\rho(\vec{R})$ مستقر در حجم V 

$$d\vec{F}_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\rho(\vec{R}')dv'(\vec{R} - \vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|^3}$$

$$\vec{F}_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{q\rho(\vec{R}')dv'(\vec{R} - \vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|^3}$$

مثال: سه بار نقطه ای q_1 ، q_2 و q که به ترتیب در نقاط p_1 و p_2 و p در فضای خالی قرار گرفته‌اند را در نظر بگیرید نیرو وارد بر بار q چقدر است؟

$$\begin{cases} q_1 = 3.2 \times 10^{-9} \text{ C} \\ p_1(2, 1, 0) \end{cases} \quad \begin{cases} q_2 = -4.8 \times 10^{-9} \text{ C} \\ p_2(3, 2, 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} q = -1.6 \times 10^{-9} \text{ C} \\ p(1, 2, 0) \end{cases}$$

$$\vec{R} = \overrightarrow{OP} = \hat{a}_x(1-0) + \hat{a}_y(2-0) + \hat{a}_z(0-0) = \hat{a}_x + 2\hat{a}_y$$

$$\vec{R}_1 = \overrightarrow{OP_1} = 2\hat{a}_x + \hat{a}_y$$

$$\vec{R}_2 = \overrightarrow{OP_2} = 3\hat{a}_x + 2\hat{a}_y$$

$$\vec{R} - \vec{R}_1 = \hat{a}_x(1-2) + \hat{a}_y(2-1) = -\hat{a}_x + \hat{a}_y$$

$$|\vec{R} - \vec{R}_1| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\vec{R} - \vec{R}_2 = -2\hat{a}_x$$

$$|\vec{R} - \vec{R}_2| = 2$$

$$\vec{F}_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^2 \frac{qq_i}{|\vec{R} - \vec{R}_i|^3} (\vec{R} - \vec{R}_i)$$

$$\vec{F}_q = \frac{-1.6 \times 10^{-9}}{4\pi \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}} \left[\frac{3.2 \times 10^{-9}}{(\sqrt{2})^3} (-\hat{a}_x + \hat{a}_y) + \frac{-4.8 \times 10^{-9}}{2^3} (-2\hat{a}_x) \right]$$

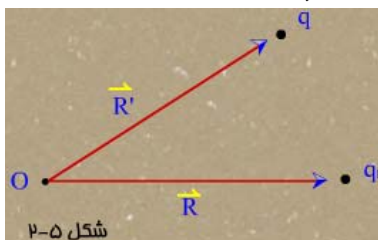
$$\vec{F}_q = (-\hat{a}_x - \hat{a}_y 16.3) \times 10^{-9} \quad N$$

میدان الکتریکی و شدت میدان الکتریکی در فضای خالی

وجود يك بار الکتریکی در فضا، به تمام نقاط آن فضا خاصیت الکتریکی می‌دهد (میدان الکتریکی) به نحویکه بارهای دیگر از وجود این بار آگاه می‌شوند. بجای محاسبه نیرو در معرفي يك میدان، از شدت میدان الکتریکی استفاده می‌شود که بصورت زیر بیان و تعریف می‌گردد:

$$\vec{E}(\vec{R}) = \lim_{q_t \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(\vec{R})}{q_t} \quad \left[\frac{N}{C} \right] \text{ یا } \left[\frac{V}{m} \right]$$

\vec{F} نیروی وارد بر بار کوچک آزمایشی q_t که در نقطه \vec{R} قرار دارد.



$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(\vec{R} - \vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|^3}$$

بعبارتی \vec{E} شدت میدان الکتریکی در هر نقطه برابر است با نیروی وارد بر بار $+1$ کولمبی بنابراین برای مجموعه بارهای گسسته

$$\vec{E}(\vec{R}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i(\vec{R} - \vec{R}_i)}{|\vec{R} - \vec{R}_i|^3}$$

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\rho(\vec{R}') dV' (\vec{R} - \vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|^3}$$

برای بار پیوسته حجمی

چگالی بار حجمی پیوسته ρ با واحد c/m^3

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_s \frac{\rho_s(\vec{R}') ds (\vec{R} - \vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|^3}$$

بار پیوسته سطحی

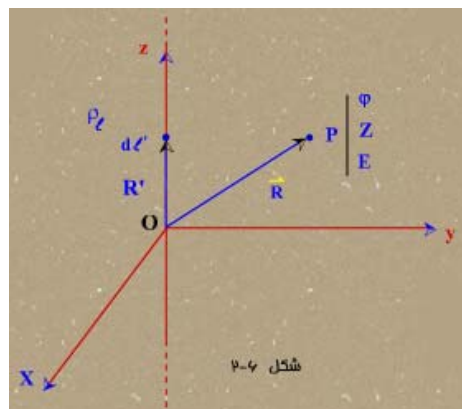
چگالی بار پیوسته سطحی ρ_s با واحد c/m^2

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_c \frac{\rho_l(\vec{R}') dl' (\vec{R} - \vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|^3}$$

چگالی بار پیوسته خطی ρ_l با واحد c/m

مثال: محاسبه شدت میدان الکتریکی ناشی از یک بار خطی به طول نامحدود، مستقیم با چگالی بار یکنواخت ρ_l در فضای خلاء می‌توان پیش بینی کرد که \vec{E} مؤلفه z و ϕ نخواهد داشت.

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_c \frac{\rho_l(\vec{R}') d\vec{l}'}{|\vec{R} - \vec{R}'|^3} (\vec{R} - \vec{R}')$$



$$\vec{R} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z = r\hat{a}_r + z\hat{a}_z$$

$$\vec{R}' = z'\hat{a}_z$$

$$\vec{R} - \vec{R}' = r\hat{a}_r + (z - z')\hat{a}_z$$

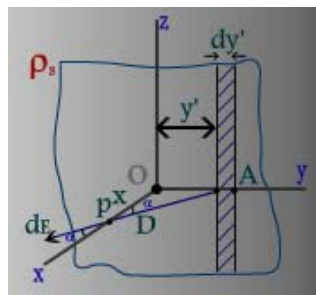
$$|\vec{R} - \vec{R}'| = \sqrt{r^2 + (z - z')^2} \quad dl' = dz'$$

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{R}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_l dz'}{[r^2 + (z - z')^2]^{\frac{3}{2}}} [r\hat{a}_r + (z - z')\hat{a}_z] \\ &= \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \hat{a}_r \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r dz'}{[r^2 + (z - z')^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \hat{a}_z \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(z - z') dz'}{[r^2 + (z - z')^2]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \hat{a}_r \left[\frac{z' - z}{r\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \hat{a}_z \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} \right\} \\ &= \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \hat{a}_r \frac{2}{r} + 0 = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{a}_r \end{aligned}$$

بنابراین \vec{E} از نظر اندازه مستقل از z, ϕ است و تنها در جهت \hat{a}_r مؤلفه دارد و صرفاً وابسته به فاصله (عمومی) از منبع (بار خطی) است (r) باید توجه کرد که چون \hat{a}_r وابسته به ϕ می‌باشد، جهت \vec{E} وابسته به ϕ خواهد بود.

مثال: تعیین شدت میدان الکتریکی ناشی از یک بار صفحه‌ای مسطح، بی‌نهایت و با چگالی یکسان ρ_s .

برای حل صفحه را محدود را در موقعیت $x=0$ (صفحه yz) قرار می‌دهیم. چون در دو جهت z, y نامحدود می‌باشد پس \vec{E} تنها در جهت x مؤلفه دارد.



ساده‌ترین نقطه برای محاسبه \vec{E} نقطه $P(0,0,0)$ یعنی نقطه‌ای روی محور x هاست.

روش اول: استفاده از فرمول کلی $\vec{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_s (\vec{R} - \vec{R}') dz' dy'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R} - \vec{R}'|^3}$ و با انتخاب دیفرانسیلی از سطح با مقدار بار $\rho_s dz' dy'$ و ادامه کار

روش دوم: بکارگیری از نتایج مثال قبل (بار خطی نامحدود)

$$dE|_P = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 D} = \frac{\rho_s dy'}{2\lambda\epsilon_0 D}, \quad d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y$$

$$dE_x = \frac{\rho_s dy'}{2\pi\epsilon_0 D} \cos \alpha \equiv dE \quad \text{بدلیل داشتن منبع بار خطی نامحدود } dE_y = 0 \text{ خواهد شد}$$

با جایگزینی $\cos \alpha$ و D بر حسب پارمترهای اصلی (با توجه به مثلث OPA)

$$D = \sqrt{x^2 + y'^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y'^2}}$$

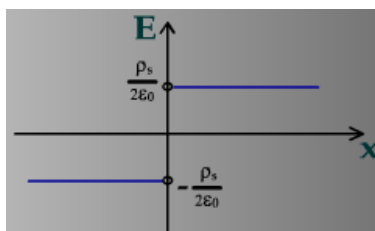
$$dE = \frac{x \rho_s dy'}{2\pi\epsilon_0 (x^2 + y'^2)}$$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \rho_s dy'}{2\pi\epsilon_0 (x^2 + y'^2)} = \frac{\rho_s}{2\pi\epsilon_0} \tan^{-1} \frac{y'}{x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{a}_x \quad x > 0$$

$$\vec{E} = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{a}_x \quad x < 0$$

که هیچگونه وابستگی به موقعیت نقطه‌ای که شدت میدان بدست خواهد آمد ندارد.
دلیل: نامحدود بودن ابعاد بار صفحه‌ای



فلوي ميدان الكتريكي و قانون گاوس

با توجه به مفهوم انتگرال سطحی روی سطح بسته روشن است که انتگرال زیر فلوي ميدان الكتريكي خارج شده از سطح را محاسبه می‌کند

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

چنانچه این سطح کل منابع (بار الكتريكي) که ميدان \vec{E} را بوجود آورده را شامل شود این انتگرال متناسب بار کل بار الكتريكي محصور شده در حجمی که سطح S آنرا احاطه کرده خواهد بود.

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{total} \quad \text{بعبارتی:}$$

$$Q_{total} = \int_V \rho dv'$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dv' \quad \text{و یا}$$

رابطه فوق قانون گاوس و سطح S ، سطح گاوسی گفته می‌شود. این قانون مستقل از شکل سطح S است.

بعنوان مثال برای يك بار نقطه‌ای واقع در مرکز مختصات

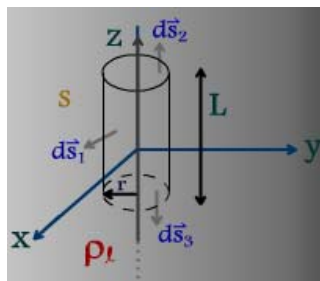
برای يك سطح گاوسی کروی:

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{a}_R \cdot \hat{a}_R R^2 \sin\theta d\theta d\phi \\ &= \frac{q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

اصل مهم: برای حل مسائل با استفاده از قانون گاوس بایستی سطحی انتخاب نمود که E روی آن سطح ثابت باشد.

مثال: بار خطی بطول نا محدود و به چگالی ρ_l روی محور z ها قرار دارد مطلوبست شدت میدان الكتريكي در هر نقطه.

انتخاب سطح گاوسی: استوانه‌ای به طول L و با شعاع قاعده برابر با r و با محور منطبق با محور z ها



$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dv'$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int \vec{E} \cdot d\vec{s}_1 + \int \vec{E} \cdot d\vec{s}_2 + \int \vec{E} \cdot d\vec{s}_3$$

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \int d\vec{s}_1 = E 2\pi r L$$

سطح جانبی

چون مقدار E در فاصله r (روی سطح جانبی) از منبع مقداری ثابت و در جهت \hat{a}_r است (عمود بر منبع) و $d\vec{s} = d\vec{s}_r$

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{s}_2 = \int E \hat{a}_r \cdot d\vec{s}_z = 0$$

قاعده بالا

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{s}_3 = \int E \hat{a}_r \cdot (-d\vec{s}_z) = 0$$

قاعده پایین

بنابراین

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E 2\pi r L$$

$$\int_V \rho dv' \equiv \int_C \rho_l dl' = \int_{-L/2}^{L/2} \rho_l dz' = \rho_l L$$

اما:

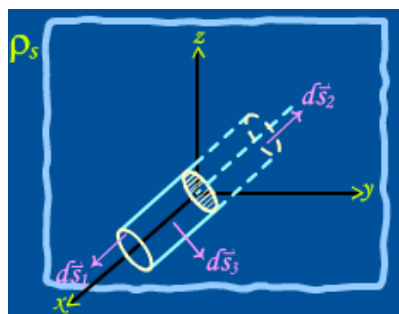
$$E 2\pi r L = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_l L) \Rightarrow E = \frac{\rho_l}{2\pi \epsilon_0 r}$$

در نتیجه:

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{\rho_l}{2\pi \epsilon_0 r} \hat{a}_r$$

که دقیقاً مشابه جواب مثال قبلی است که از روش کلی حل شد.

مثال: مطلوبست تعیین شدت میدان الکتریکی در نقاط مختلف در مقابل یک بار سطحی نامحدود به چگالی بار $\rho_s \text{ C/m}^2$



انتخاب سطح گاوسی: هر شکل فضایی که توسط صفحه باردار به دو قسمت تقسیم گردیده و بر صفحه باردار عمود باشد از جمله یک استوانه یا یک مکعب مستطیل استوانه‌ای بطول L ، محور استوانه محور x ها و سطح قاعده آن A فرض شود.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dv$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int \vec{E} \cdot d\vec{s}_1 + \int \vec{E} \cdot d\vec{s}_2 + \int \vec{E} \cdot d\vec{s}_3$$

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{\text{روبرو}} \vec{E}_x \cdot d\vec{s}_x = E \int ds_x = E \Big|_{x=-\frac{L}{2}}^{x=\frac{L}{2}} \times A$$

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{s}_2 = \int -\vec{E}_x \cdot (-d\vec{s}_x) = E \int ds_x = E \Big|_{x=-\frac{L}{2}}^{x=\frac{L}{2}} \times A$$

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{s}_3 = 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = EA + EA = 2EA$$

بنابراین

اما:

$$Q_{total} = \int \rho_s ds' = \rho_s A$$

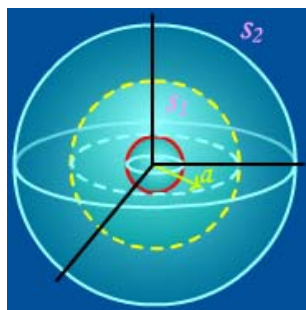
پس:

$$2EA = \frac{\rho_s A}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}, \quad \vec{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{a}_x$$

مثال: در فضای آزاد بار پیوسته‌ای تا شعاع a به چگالی $\rho = \frac{\rho_0 R^2}{a^2} \text{ C/m}^3$ موجود است شدت

میدان الکتریکی در هر نقطه را حساب کنید.

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_v \rho dv'$$



سطح گاوسی: کره به مرکز مبدأ و به شعاع R

$$I: \quad R < a$$

$$II: \quad R > a$$

$$\oint_{s_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{s}_1 = E_1 \int_{s_1} ds_R = E_1 4\pi R^2$$

برای $R < a$:

$$Q = \int \rho dv' = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{\rho_0 R'^2}{a^2} R'^2 \sin \theta' dR' d\theta' d\phi'$$

$$Q = \frac{\rho_0 R^5}{5a^2} 4\pi$$

$$E 4\pi R^2 = \frac{\rho_0 R^5}{5\epsilon_0 a^2} 4\pi$$

بنابراین:

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 R^3}{5\epsilon_0 a^2} \hat{a}_R$$

برای $R > a$:

$$\oint_{s_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{s}_2 = E_2 \int_{s_2} ds_R = E_2 4\pi R^2$$

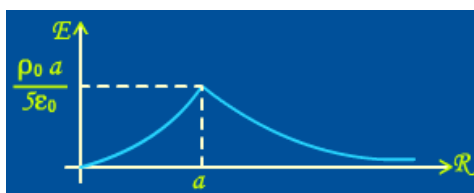
$$Q = \int \rho dv' = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a \frac{\rho_0 R'^2}{a^2} R'^2 \sin \theta' dR' d\theta' d\phi'$$

$$= \frac{4\pi \rho_0 a^3}{5}$$

بنابراین:

$$E 4\pi R^2 = \frac{4\pi \rho_0 a^3}{5\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 a^3}{5\epsilon_0 R^2} \hat{a}_R$$



شکل دیفرانسیلی قانون گاوس (معادله اول ماکسول)

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_v \rho dv'$$

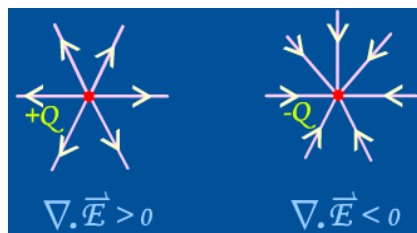
طبق قضیه گاوس

$$\int_v \nabla \cdot \vec{E} dv' = \frac{1}{\epsilon_0} \int_v \rho dv'$$

$$\int_v \nabla \cdot \vec{E} dv' = \int_v \frac{\rho}{\epsilon_0} dv' \Rightarrow \int_v \nabla \cdot \vec{E} dv' - \int_v \frac{\rho}{\epsilon_0} dv' = 0$$

$$\int_v \left(\nabla \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) dv' = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

نتیجه: چون دیورژانس با فلوی خروجی از واحد حجم متناسب است بنابراین اگر $\nabla \cdot \vec{E}$ مثبت شود یعنی ρ مثبت و یا به عبارتی خطوط میدان الکتریکی از روی بار مثبت شروع می‌شوند و بر عکس این خطوط روی بار منفی ختم می‌گردند.



مثال: بار پیوسته‌ای که در فضای آزاد میدان الکتریکی با شدت \vec{E} ایجاد می‌کند را بدست آورید:

$$\vec{E} = \begin{cases} -\hat{a}_R \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} R & 0 \leq R \leq b \\ -\hat{a}_R \frac{\rho_0 b^3}{3\epsilon_0 R^2} & R > b \end{cases}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}$$

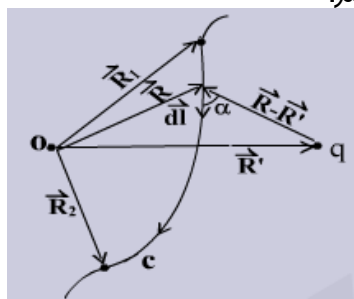
$$0 \leq R \leq b \quad \Rightarrow \quad \rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \left[-\hat{a}_R \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} R \right] = \epsilon_0 \times \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left[R^2 \left(-\frac{\rho_0}{3\epsilon_0} R \right) \right] = -\rho_0$$

$$R > b \quad \Rightarrow \quad \rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \left[-\hat{a}_R \frac{\rho_0 b^3}{3\epsilon_0 R^2} \right] = \epsilon_0 \times \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left[R^2 \left(\frac{\rho_0 b^3}{3\epsilon_0 R^3} \right) \right] = 0$$

تابع پتانسیل الکتریکی Electric potential

می‌دانیم که شدت میدان الکتریکی با نیروی وارد بر یک بار الکتریکی که در آن میدان قرار می‌گیرد رابطه دارد پتانسیل الکتریکی با میزان انرژی لازم برای آنکه یک بار الکتریکی از نقطه‌ای به نقطه دیگر حرکت کند رابطه دارد.

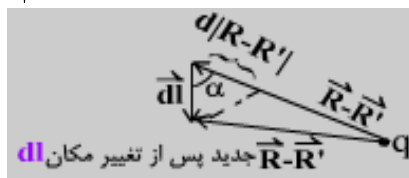
بنابراین اگر بار نقطه‌ای q را که در نقطه R' واقع است و تولید یک میدان در همه فضای خالی می‌کند در نظر بگیریم، مقدار انرژی لازم برای حرکت دادن یک بار q_t از نقطه R_1 به نقطه R_2 روی مسیر C را می‌خواهیم محاسبه کنیم.



$$\vec{F}_{q_t} = \frac{qq_t}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{R} - \vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|^3}$$

$$\vec{F} = -\vec{F}_{q_t} \text{ نیروی لازم برای حرکت } q_t$$

$$W = \int_{R_1}^{R_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{qq_t}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{R} - \vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|^3} \cdot d\vec{l}$$



$$(\vec{R} - \vec{R}') \cdot d\vec{l} = |\vec{R} - \vec{R}'| dl \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{d|\vec{R} - \vec{R}'|}{dl}$$

بنابراین:

$$W = -\frac{qq_t}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{|\vec{R} - \vec{R}'| d(|\vec{R} - \vec{R}'|)}{|\vec{R} - \vec{R}'|^3} = \frac{-qq_t}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{d(|\vec{R} - \vec{R}'|)}{|\vec{R} - \vec{R}'|^2}$$

$$W = q_t \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R}_2 - \vec{R}'|} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R}_1 - \vec{R}'|} \right]$$

پس W بستگی به مسیر C ندارد و تنها تابع نقاط ابتدایی و انتهایی است.

$$W = q_t [v(\vec{R}_2) - v(\vec{R}_1)] = q_t \Delta V$$

بنابراین انرژی لازم برای تغییر مکان q_t از نقطه‌ای به نقطه دیگر با حاصلضرب اختلاف پتانسیل دو نقطه فوق در بار q_t مساویست.

$$V(\vec{R}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R} - \vec{R}'|}$$

پتانسیل نقطه \vec{R} به دلیل وجود بار الکتریکی q در نقطه \vec{R}' واحد J/C یا Volt

$$V(\vec{R}) = \sum_{i=1}^N \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R} - \vec{R}'|} \quad \text{برای } N \text{ بار الکتریکی نقطه ای}$$

$$V(\vec{R}) = \int_v \frac{\rho(\vec{R}') dv'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R} - \vec{R}'|} \quad \text{برای یک بار پیوسته}$$

مثال: اگر بار نقطه ای 10^{-7} کولمبی در $(3, 2, 1)$ واقع باشد، تابع پتانسیل را در هر نقطه در فضای خالی به دست آورید.

$$\vec{R} = \hat{a}_x x + \hat{a}_y y + \hat{a}_z z$$

$$\vec{R} = \hat{a}_x + \hat{a}_y 2 + \hat{a}_z 3$$

$$|\vec{R} - \vec{R}'| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2}$$

$$V(\vec{R}) = V(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R} - \vec{R}'|} = \frac{900}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2}}$$

مثال: با پیوسته با چگالی $10^{-7} R \text{ C/m}^3$ از مبدا مختصات تا شعاع ۱ متر قرار دارد پتانسیل را در مرکز مختصات به دست آورید.

$$\vec{R} = 0$$

$$\vec{R}' = \hat{a}_R R'$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{R}') dv'}{|\vec{R} - \vec{R}'|}$$

$$|\vec{R} - \vec{R}'| = R'$$

$$V(0,0,0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^1 \frac{10^{-7} R'}{R'} 4\pi R'^2 dR' = 1200\pi$$

- دیدگاهی دیگر

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{q(\vec{R} - \vec{R}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R} - \vec{R}'|^3}$$

$$V(\vec{R}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R} - \vec{R}'|}$$

$$\frac{d}{dR} \left(\frac{1}{|\vec{R} - \vec{R}'|} \right) = -\frac{1}{|\vec{R} - \vec{R}'|^2} \equiv \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\vec{E}(\vec{R}) = -\nabla V(\vec{R})$$

بنابراین:

* بنابراین تا کنون سه روش برای محاسبه \vec{E} قابل دسترس است.

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\rho(\vec{R}') dv'}{|\vec{R} - \vec{R}'|^3} (\vec{R} - \vec{R}') \quad \text{۱ - استفاده از فرمول کلی (بر پایه قانون کولمب)}$$

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_v \rho dv' \quad \text{۲ - استفاده از قانون گاوس}$$

$$V(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho dv'}{|\vec{R} - \vec{R}'|} \quad \text{۳ - استفاده از رابطه } \vec{E} = -\nabla V \text{ با محاسبه } V \text{ از رابطه}$$

- شکل انتگرالی رابطه $\vec{E} = -\nabla V$ عبارتست از:

$$V(P_2) - V(P_1) = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

-قانون (معادله) دوم ماکسول در میدان ساکن

$$\nabla \times (-\nabla V) = -\nabla \times (\nabla V) = 0$$

چون:

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

بنابراین:

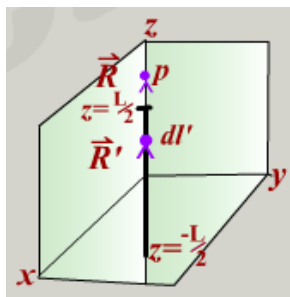
$$\int_s \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

و شکل انتگرالی آن:

بعبارتی چنانچه بار الکتریکی در یک میدان الکتریکی ساکن در یک مسیر بسته گردش نماید (نقطه شروع و اتمام انتگرالگیری یکی باشد) هیچگونه انرژی از میدان کسب و هیچگونه انرژی به میدان داده نمیشود یعنی انرژی ذخیره شده ثابت است و میدانهای فوق را کنزرواتو (Conservation) یا پایستار گویند.

- بنابراین کرل و دیورژانس میدان الکتریکی ساکن محاسبه گردید و در نتیجه این میدان طبق قضیه هلمهولتز کاملاً مشخص شده است.

مثال: منبع بار خطی به طول L بر روی محور z ها با چگالی یکنواخت ρ_l در دست است. مطلوبست محاسبه شدت میدان الکتریکی و تابع پتانسیل الکتریکی نقاط مستقر در امتداد این بار خطی:



$$\left. \begin{array}{l} r = 0 \\ \varphi = 0 \\ z = z \end{array} \right\}$$

$$\vec{R} = z\hat{a}_z$$

$$\vec{R}' = z'\hat{a}_z$$

$$|\vec{R} - \vec{R}'| = (z - z') \quad z > L/2$$

$$dl' = dz'$$

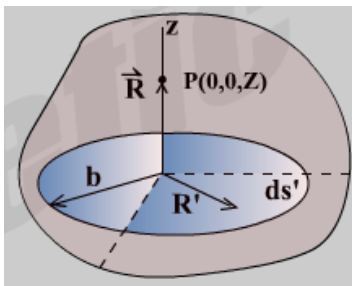
$$V(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\rho_l dz'}{(z - z')}$$

$$V(\vec{R}) = -\frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \ln(z - z') \Big|_{-L/2}^{L/2}$$

$$V = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{z + (L/2)}{z - (L/2)} \right] \quad |z| > L/2$$

$$\vec{E} = -\nabla V = -\hat{a}_z \frac{dv}{dz} = \hat{a}_z \frac{\rho_l L}{4\pi\epsilon_0 \left[z^2 - (L/2)^2 \right]} \quad z > L/2$$

مثال: مطلوبست محاسبه شدت میدان الکتریکی بر روی محور یک دیسک دایره‌ای با شعاع b که بار یکنواخت سطحی به چگالی ρ_s روی آن توزیع شده است.



$$\vec{R} = z\hat{a}_z$$

$$\vec{R}' = r'\hat{a}_r$$

$$|\vec{R} - \vec{R}'| = \sqrt{z^2 + r'^2}$$

$$ds' = r' dr' d\phi'$$

$$V(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_s \frac{\rho_s ds'}{|\vec{R} - \vec{R}'|} = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^b \frac{r' dr' d\phi'}{\sqrt{z^2 + r'^2}}$$

$$V(\vec{R}) = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \sqrt{z^2 + r'^2} \Big|_0^b = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left[(z^2 + b^2)^{1/2} - |z| \right]$$

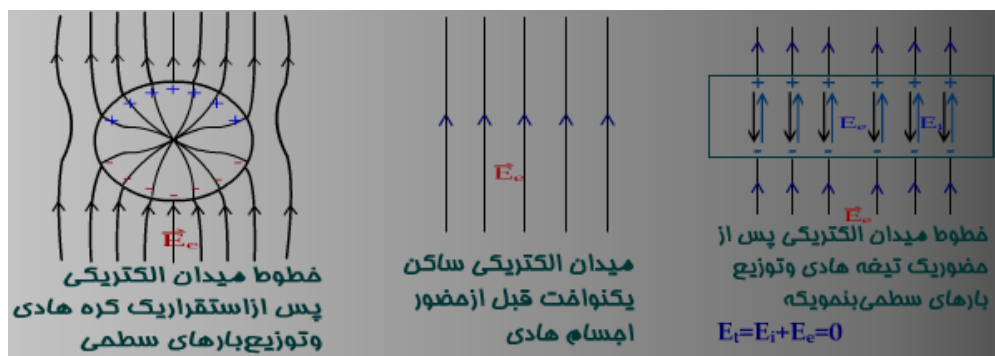
$$\vec{E} = -\nabla V = -\hat{a}_z \frac{dv}{dz} = \begin{cases} \hat{a}_z \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left[1 - z(z^2 + b^2)^{-1/2} \right] & z > 0 \\ -\hat{a}_z \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left[1 + z(z^2 + b^2)^{-1/2} \right] & z < 0 \end{cases}$$

حضور هادی‌ها در میدان الکتریکی ساکن

چنانچه یک جسم هادی را در نظر بگیریم، روشن است که هیچ اختلاف پتانسیلی بین کلیه نقاط آن وجود ندارد و هادی در یک سطح پتانسیل ثابت قرار دارد بنابراین با توجه به $\vec{E} = -\nabla V$ شدت میدان در جسم هادی صفر خواهد بود.

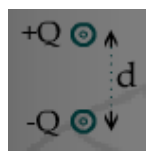
از طرفی چنانچه در جسم هادی شدت میدان الکتریکی غیر صفری وجود داشته باشد، این میدان سبب اعمال نیرو به بارهای الکتریکی (الکترونها) موجود در هادی کرده و در نتیجه تجمع بارهای هم‌نام منفی در یک طرف و بارهای مثبت در طرف دیگر شده یعنی ایجاد اختلاف پتانسیل بین این دو مکان از هادی می‌گردد که خلاف واقع است بنابراین \vec{E} در داخل اجسام هادی صفر خواهد بود.

چنانچه یک هادی در یک میدان الکتریکی خارجی قرار گیرد سبب تغییر توزیع بارهای موجود در داخل هادی می‌شود و اگر این هادی خنثی باشد، توزیع جدید بارها به نحوی خواهد بود که میدان بوجود آمده از این توزیع جدید میدانی بوجود می‌آورند که دقیقاً برابر با میدان خارجی اما در خلاف جهت با آن باشند به نحوی که \vec{E} کل در داخل هادی صفر شود توزیع بارها بر روی سطوح هادی بطریقی خواهد شد تا خطوط میدان در جهت عمود بر این سطوح قرار گیرند چه در غیر اینصورت ایجاد مؤلفه مماسی کرده و همین امر نشان دهنده وجود میدان غیر صفر در هادی (سطح هادی) می‌شود که غیر ممکن است.



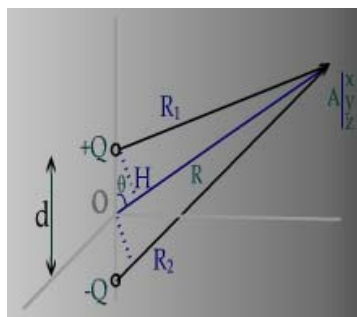
دو قطبی الکتریکی Electric Dipole

ترکیبی از دو بار الکتریکی مساوی و غیر همنام که بفاصله مشخصی از هم قرار گرفته‌اند. بعنوان مثال: دو بار $+Q$ و $-Q$ بفاصله d



محاسبه تابع پتانسیل الکتریکی يك دو قطبی

در این قسمت پتانسیل ناشی از يك دو قطبی الکتریکی در ناحیه دور (Far zone) را بدست می‌آوریم و با استفاده از رابطه $\vec{E} = -\nabla V$ شدت میدان الکتریکی آن (Far Field) را محاسبه خواهیم کرد.



يك دو قطبی واقع در مبدأ مختصات را در نظر بگیرید.

محاسبه پتانسیل نقطه‌ای کلی مانند $\begin{matrix} R \\ A \\ \theta \\ \varphi \end{matrix}$

$$V(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^2 \frac{q_i}{|\vec{R} - \vec{R}_i|}$$

$$V(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{+Q}{R_1} + \frac{-Q}{R_2} \right]$$

$$R_1, R_2, R \gg d \Rightarrow \frac{d^2}{R^2} \rightarrow 0$$

ناحیه دور

$$R_1 \approx R - OH$$

$$OH = \frac{d}{2} \cos \theta$$

$$R_1 \approx R - \frac{d}{2} \cos \theta$$

$$R_2 \approx R + \frac{d}{2} \cos \theta$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} + \frac{-1}{R_2} \right] \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R - \frac{d}{2} \cos \theta} - \frac{1}{R + \frac{d}{2} \cos \theta} \right] \quad \text{همچنین:}$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{R + \frac{d}{2} \cos \theta - R + \frac{d}{2} \cos \theta}{R^2 - \frac{d^2}{4} \cos^2 \theta} \right] = \frac{Qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R^2 \left[1 - \frac{d^2}{4R^2} \cos^2 \theta \right]}$$

$$V(\vec{R}) \approx \frac{Qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

\vec{P} گشتاور دو خطی الکتریکی Electric Dipole moment جهت بردار \vec{P} از بار منفی بطرف بار مثبت است (یعنی برعکس جهت \vec{E})

$$P = Qd, \quad \hat{a}_p = \hat{a}_z$$

$$V(\vec{R}) = \frac{P \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad \begin{matrix} +Q_0 \\ \uparrow \vec{P} \\ -Q_0 \end{matrix}$$

$$\hat{a}_z \cdot \hat{a}_R = \cos \theta$$

از طرفی می‌دانیم:

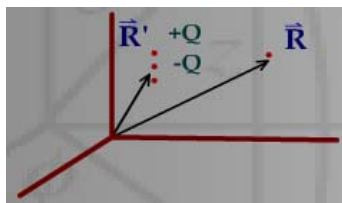
$$P \cos \theta = P \hat{a}_z \cdot \hat{a}_R = \vec{P} \cdot \hat{a}_R = \vec{P} \cdot \frac{\vec{R}}{R}$$

بنابراین:

$$V(\vec{R}) = \frac{\vec{P} \cdot \vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

در نتیجه:

چنانچه دو قطبی در موقعیت \vec{R}' واقع شده باشد و نه در مبدأ مختصات



$$V(\vec{R}) = \frac{\vec{P} \cdot (\vec{R} - \vec{R}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R} - \vec{R}'|^3}$$

- میدان الکتریکی یک دو قطبی

$$\vec{E} = -\nabla V = -\left(\hat{a}_R \frac{dV}{dR} + \hat{a}_\theta \frac{1}{R} \frac{dV}{d\theta} \right)$$

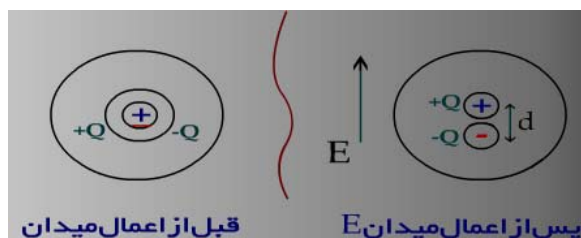
$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{P \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 R^3} \hat{a}_R + \frac{P \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 R^3} \hat{a}_\theta$$

و یا

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{\vec{P} \cdot \hat{a}_R}{2\pi\epsilon_0 R^3} \hat{a}_R - \frac{\vec{P} \cdot \hat{a}_\theta}{4\pi\epsilon_0 R^3} \hat{a}_\theta$$

حضور عایق‌ها در میدان الکتریکی ساکن و پلاریزاسیون

در اثر اعمال يك میدان الکتریکی به اتم یا مولکول يك جسم عایق، مرکز بارهای مثبت و مرکز بارهای منفی که قبل از آن بر روی هم قرار داشته‌اند، جابه‌جا می‌شوند. این جابجا شدن با فرض اینکه ساختار فوق خنثی است بصورت يك دو قطبی نمود خواهد کرد $+Q$ (کل بار مثبت) و $-Q$ (کل بار منفی) که فاصله d از هم قرار می‌گیرند. شدت \vec{E} به اندازه‌ای نیست که بارهای منفی که در قید ساختار هستند از آن رها شدند.

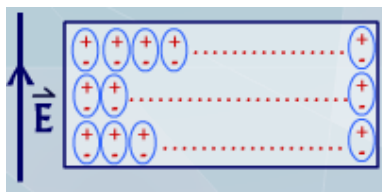


دو نیرو بر هسته $(+Q)$ وارد می‌شود F_{-Q} ناشی از بارهای منفی $(-Q)$ و F_E ناشی از میدان \vec{E} که چون هسته در حال تعادل است بایستی نیروهای فوق به تعادل برسند یعنی:

$$\vec{F}_{-Q} + \vec{F}_E = 0$$

$$F_{-Q} = F_E \Rightarrow Qd = \epsilon_0 X_e E \Rightarrow \vec{P} = \epsilon_0 X_e \vec{E}$$

X_e ضریب تأثیرپذیری یا حساسیت الکتریکی عایق نامیده می‌شود. (Susceptibility) چنانچه يك قطعه عایق که متشکل از تعداد زیادی اتم یا مولکول آن عایق خواهد بود را در نظر بگیریم که در يك میدان الکتریکی خارجی قرار بگیرد، قطب‌بندی و یا اصطلاحاً پلاریزاسیون اتفاق و یا عبارتی نظم خاصی در ساختار اتمی با مولکولی عایق بوجود می‌آید که ایجاد ممان دو قطبی در آن خواهد کرد.



- چون \vec{E} آنچنان زیاد نیست که الکترون‌ها از قید هسته جدا شوند، تغییر شکل (deform) در عایق رخ نخواهد داد و بارها مقید به ساختار خواهند بود و بهمین دلیل آنها را بارهای مقید Bound charge یا بارهای پلاریزه گویند.
- با قطب‌بندی بارهای مقید، تولید میدان الکتریکی می‌شود در خلاف جهت \vec{P} یا \vec{E} که سبب خواهد شد شدت میدان کل از مقدار اولیه کاهش یابد.

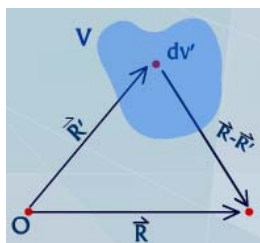
$$\vec{P}^+ \uparrow \quad \vec{P}^- \downarrow \quad \vec{E}_p \uparrow \quad \vec{E} \uparrow$$

$$\vec{E}_{total} = \vec{E}_p + \vec{E}$$

$$E_{total} = E - E_p < E$$

و این دلیل عمده در بکارگیری عایق‌ها در مواجهه با میدان‌های قوی (ولتاژ زیاد) می‌باشد.

محاسبه پتانسیل و شدت میدان الکتریکی بعلت عایق‌های پلاریزه

ممان در واحد حجم عایق \vec{P} 

$$dV(\vec{R}) = \frac{\vec{P}(\vec{R}') dV' (\vec{R} - \vec{R}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R} - \vec{R}'|^3}$$

$$V(\vec{R}) = \int_V \frac{P(\vec{R}') (\vec{R} - \vec{R}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R} - \vec{R}'|^3} dV'$$

$$V(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left\{ \nabla' \cdot \left[\frac{\vec{P}}{|\vec{R} - \vec{R}'|} \right] - \frac{\nabla' \cdot \vec{P}}{|\vec{R} - \vec{R}'|} \right\} dV'$$

$$V(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\vec{P} \cdot d\vec{s}'}{|\vec{R} - \vec{R}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{-\nabla' \cdot \vec{P}}{|\vec{R} - \vec{R}'|} dV'$$

$$V(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\vec{P} \cdot \hat{n} ds'}{|\vec{R} - \vec{R}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{-\nabla' \cdot \vec{P}}{|\vec{R} - \vec{R}'|} dV'$$

$$V(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\vec{P} \cdot d\vec{s}'}{|\vec{R} - \vec{R}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{P dv'}{|\vec{R} - \vec{R}'|} \quad \text{پتانسیل ناشی از توزیع بارهای حجمی و سطحی آزاد:}$$

چگالی بار مفید (پلاریزه) سطحی در سطح عایق پلاریزه: $\rho_{P_s} = \vec{P} \cdot \hat{n}$ چگالی بار مفید (پلاریزه) حجمی در حجم عایق پلاریزه: $\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}$

$$V(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\rho_s + \rho_{P_s}}{|\vec{R} - \vec{R}'|} ds' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho + \rho_P}{|\vec{R} - \vec{R}'|} dV' \quad \text{بنابراین:}$$

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{(\rho_s + \rho_{P_s})(\vec{R} - \vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|^3} ds' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{(\rho + \rho_P)(\vec{R} - \vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|^3} dV'$$

چگالی فلوئید میدان الکتریکی

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V (\rho + \rho_P) dv'$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho + \rho_P}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E}) = \rho - \nabla \cdot \vec{P}$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \text{Electric Flux Density}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad \text{چون} \quad \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{free} = \int_V \rho dv'$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

اما می‌دانیم که

$$\Rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 X_e \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + X_e) \vec{E}, \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + X_e) \quad \text{Absolute Electric Permittivity}$$

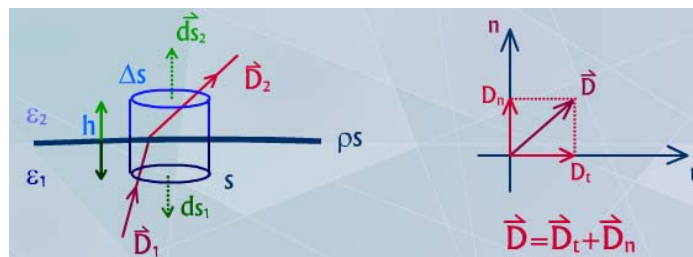
ϵ = ضریب نفوذپذیری مطلق عایق

$$\epsilon_r = 1 + X_e$$

$$\text{Relative Electric Permittivity}$$

ϵ_r = ضریب نفوذپذیری نسبی عایق

شرایط مرزی در سطح مشترک دو محیط Boundary condition



$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$$

$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_{s_1} \vec{D} \cdot d\vec{s}_1 + \int_{s_2} \vec{D} \cdot d\vec{s}_2 + \int_{\text{جانبی}} \vec{D} \cdot d\vec{s}$$

$$\int_{s_1} \vec{D}_1 \cdot d\vec{s}_1 = \int_{s_1} (\vec{D}_{1t} + \vec{D}_{1n}) \cdot d\vec{s}_1 = \int_{s_1} \vec{D}_{1t} \cdot d\vec{s}_1 + \int_{s_1} \vec{D}_{1n} \cdot d\vec{s}_1 = 0 + D_{1n} (-\Delta S) = -D_{1n} \Delta S$$

$$\int_{s_2} \vec{D}_2 \cdot d\vec{s}_2 = \int_{s_2} (\vec{D}_{2t} + \vec{D}_{2n}) \cdot d\vec{s}_2 = 0 + D_{2n} (\Delta S) = D_{2n} \Delta S$$

$$\int_{\text{جانبی}} \vec{D} \cdot d\vec{s} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$\Rightarrow \oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = D_{2n} \Delta S - D_{1n} \Delta S$$

چون عایق‌ها کامل فرض شده‌اند:

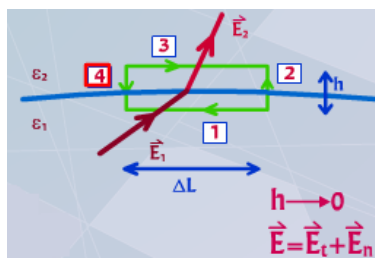
$$Q = \int_V \rho dv' = \int_S \rho_s ds' = \rho_s \Delta S$$

$$(D_{2n} - D_{1n}) \Delta S = \rho_s \Delta S \Rightarrow D_{2n} - D_{1n} = \rho_s$$

$$\text{if } \rho_s = 0 \Rightarrow D_{2n} = D_{1n}$$

$$\epsilon_2 E_{2n} = \epsilon_1 E_{1n}$$

$$\nabla \cdot \vec{P} = -\rho_p \Rightarrow P_{1n} - P_{2n} = \rho_{ps}$$



$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{(1)} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l}_1 + \int_{(2)} \vec{E} \cdot d\vec{l}_2 + \int_{(3)} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l}_3 + \int_{(4)} \vec{E} \cdot d\vec{l}_4$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} &= \int_{(1)} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l}_1 + \int_{(2)} \vec{E} \cdot d\vec{l}_2 + \int_{(3)} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l}_3 + \int_{(4)} \vec{E} \cdot d\vec{l}_4 \\ &= E_{1t} \Delta L + 0 + E_{2t} (-\Delta L) + 0 = (E_{1t} - E_{2t}) \Delta L = 0 \end{aligned}$$

$$E_{1t} = E_{2t}$$

$$\frac{D_{1t}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_2}$$

چنانچه یکی از محیطها هادی باشد با توجه به آنکه در هادی $\vec{P}, \vec{D}, \vec{E}$ صفر است.

(مثلاً محیط اول هادی است)

$$D_{2n} - D_{1n} = \rho_s \quad E_1 = D_1 = P_1 = 0$$

$$\Rightarrow D_{2n} = \rho_s$$

$$E_{2n} = \frac{\rho_s}{\epsilon_2}$$

$$E_{2t} = E_{1t} = 0$$

یعنی در مرز هادیها تنها مؤلفه عمود وجود دارد.

مثال: بار نقطه‌ای +Q در مرکز یک پوسته هادی کروی با شعاع داخلی R_i و شعاع بیرونی

R_o قرار دارد توابع \vec{E} و V را بر حسب فاصله R بدست آورید (محیط مسئله فضای آزاد)

- برای ناحیه $R > R_o$

سطح گاوسی کروی با شعاع R :

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_t}{\epsilon_o}$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_1 4\pi R^2$$

با فرض آنکه پوسته هادی خنثی باشد:

$$Q_t = \int \rho dv = Q$$

$$E_1 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_o} \Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o R^2} \hat{a}_R$$

$$V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$V_1(\vec{R}) - V(\infty) = -\int_{\infty}^R \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = -\int_{\infty}^R \frac{Q}{4\pi\epsilon_o R'^2} \hat{a}_R \cdot \hat{a}_R dR'$$

$$V_1 = \left[\frac{Q}{4\pi\epsilon_o R'} \right]_{\infty}^R = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o R} \quad \text{با فرض } V(\infty) = 0$$

- برای ناحیه $R_i < R < R_o$ چون در جسم هادی قرار داریم:

$$E_2 = 0$$

$$V_2 = V_1|_{R=R_o} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o R_o}$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_3 4\pi R^2$$

- برای ناحیه $R < R_i$ سطح گاوسی کروی با شعاع R :

$$Q_t = Q$$

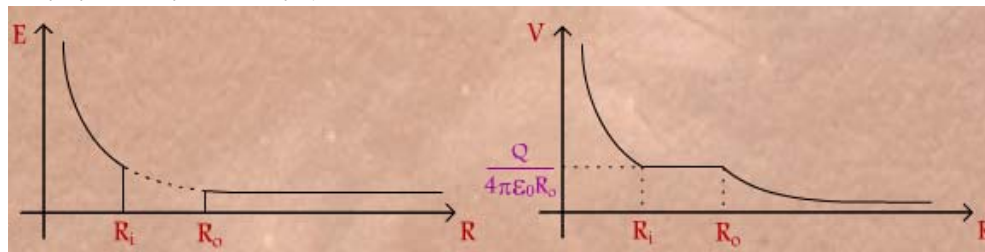
بنابراین

$$E_3 = 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_3 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{a}_R$$

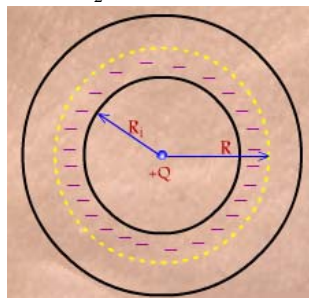
$$V_3 = -\int_{\infty}^R \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_{\infty}^{R_0} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} - \int_{R_0}^R \vec{E}_3 \cdot d\vec{l}$$

$$V_3 = V_2 - \int_{R_0}^R \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R'^2} dR' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0} + \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R'} \right) \Big|_{R_0}^R$$

$$V_3 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0}$$



مثال: برای مثال قبل مطلوبست تعیین بارهای توزیع شده در نقاط مختلف پوسته هادی. با توجه به خنثی بودن هادی و با عنایت به آنکه $E_2 = 0$:



$$\oint \vec{E}_2 \cdot d\vec{s} = \frac{Q_t}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow Q_t = 0 \Rightarrow Q + Q_s = 0$$

$$\Rightarrow Q_s = -Q \Rightarrow \rho_s \Big|_{R=R_i} = -\frac{Q}{4\pi R_i^2}$$

دیدگاه دیگر:

$$D_{2n} - D_{1n} = \rho_s$$

$$R = R_i \text{ در}$$

$$0 - D_1 = P_s \Rightarrow -\epsilon_0 E_1 \Big|_{R=R_i} = \rho_s$$

$$-\frac{Q}{4\pi R_i^2} = \rho_s$$

$$\Rightarrow \rho_s = -\frac{Q}{4\pi R_i^2}$$

بنابراین

$$Q_s \Big|_{R=R_0} = -Q_s \Big|_{R=R_i} = Q$$

$$\rho_s \Big|_{R=R_0} = \frac{Q}{4\pi R_0^2}$$

$$D_3 \Big|_{R=R_0} - D_2 \Big|_{R=R_0} \Rightarrow \frac{Q}{4\pi R_0^2} - 0 = \rho_s \quad \text{و یا :}$$

مثال: چنانچه پوسته کروی مثال قبل از جنس عایق با ثابت عایقی ϵ_r باشد مطلوبست محاسبه $V, \bar{P}, \bar{D}, \bar{E}$ بر حسب فاصله R و نیز تعیین چگالی بارهای پلاریزه.

$R > R_0$:

$$\oint \bar{D}_1 \cdot d\bar{s}_1 = Q_t \Rightarrow D_1 4\pi R^2 = Q \Rightarrow \bar{D}_1 = \frac{Q}{4\pi R^2} \hat{a}_R$$

$$\bar{E}_1 = \frac{\bar{D}_1}{\epsilon_1} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R^2} \hat{a}_R$$

$$\bar{P}_1 = \bar{D}_1 - \epsilon_0 \bar{E} = \epsilon_1 \bar{E}_1 - \epsilon_0 \bar{E} = \epsilon_0 \bar{E} - \epsilon_0 \bar{E} = 0$$

$$V_1(R) - V(\infty) = - \int_{\infty}^R \bar{E}_1 \cdot d\bar{l} = - \int_{\infty}^R \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R'^2} dR' = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R'} \Big|_{\infty}^R$$

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R}$$

$R_i < R < R_0$:

$$\oint \bar{D}_2 \cdot d\bar{s}_2 = Q_t \Rightarrow D_2 4\pi R^2 = Q \Rightarrow \bar{D}_2 = \frac{Q}{4\pi R^2} \hat{a}_R$$

$$\bar{E}_2 = \frac{\bar{D}_2}{\epsilon_2} = \frac{Q}{4\pi \epsilon R^2} \hat{a}_R$$

$$\bar{P}_2 = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \bar{E}_2 = \frac{Q(\epsilon_r - 1)}{4\pi \epsilon_r R^2} \hat{a}_R$$

$$V_2 = - \int_{\infty}^R \bar{E} \cdot d\bar{l} = - \int_{\infty}^{R_0} \bar{E}_1 \cdot d\bar{l} - \int_{R_0}^R \bar{E}_2 \cdot d\bar{l}$$

$$V_2 = V_1(R = R_0) - \int_{R_0}^R \frac{Q}{4\pi \epsilon R'^2} dR' = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R_0} + \frac{Q}{4\pi \epsilon R} - \frac{Q}{4\pi \epsilon R_0}$$

$$V_2 = \frac{Q}{4\pi \epsilon R} + \frac{Q}{4\pi R_0} \left(\frac{1}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon} \right)$$

$R < R_i$:

$$\oint \bar{D}_3 \cdot d\bar{s}_3 = Q_t \Rightarrow \bar{D}_3 = \frac{Q}{4\pi R^2} \hat{a}_R$$

$$\bar{E}_3 = \frac{\bar{D}_3}{\epsilon_3} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R^2} \hat{a}_R$$

$$\bar{P}_3 = 0$$

$$V_3 = - \int_{\infty}^R \bar{E} \cdot d\bar{l} = - \int_{\infty}^{R_i} \bar{E} \cdot d\bar{l} - \int_{R_i}^R \bar{E}_3 \cdot d\bar{l}$$

$$V_3 = V_2(R = R_i) - \int_{R_i}^R \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R'^2} dR'$$

$$V_3 = \frac{Q}{4\pi \epsilon R_i} + \frac{Q}{4\pi R_0} \left(\frac{1}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon} \right) + \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R} - \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R_i}$$

برای محاسبه چگالی بار حجمی پلاریزه در فاصله $R_i < R < R_0$:

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}_2$$

$$\rho_p = -\frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} (R^2 P_2) = -\frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left(\frac{Q(\epsilon_r - 1)}{4\pi\epsilon_r} \right) = 0$$

$$\rho_p \Big|_{R=R_0} = (\vec{P} \cdot \hat{n}) \Big|_{R=R_0} = \vec{P}_2 \Big|_{R=R_0} \cdot \hat{a}_R = \frac{Q(\epsilon_r - 1)}{4\pi\epsilon_r R_0^2} \hat{a}_R \cdot \hat{a}_R$$

$$\rho_p \Big|_{R=R_0} = \frac{Q(\epsilon_r - 1)}{4\pi\epsilon_r R_0^2}$$

$$\rho_p \Big|_{R=R_i} = \vec{P}_2 \Big|_{R=R_i} \cdot \hat{n} \Big|_{R=R_i} = \frac{Q(\epsilon_r - 1)}{4\pi\epsilon_r R_i^2} \hat{a}_R \cdot (-\hat{a}_R) = -\frac{Q(\epsilon_r - 1)}{4\pi\epsilon_r R_i^2}$$

نکته: قدرت تحمل عایق (ماده) را حداکثر شدت میدان الکتریکی اعمالی به عایق بدون آنکه شکست (Breakdown) در مورد عایق رخ ندهد و عبارتی تغییر شکل (ساختار) مولکولی انجام نگیرد. معمولاً این پارامتر را با واحد v/m بیان می‌گردد و مفهوم آن بصورت حداکثر ولتاژ قابل

اعمال به قطعه‌ای با ضخامت مشخص بکار می‌رود.

مثلاً قدرت تحمل عایقی هوا (با فشار اتمسفر) $3 \times 10^6 v/m$ است و یا برای میکا Mica با

$\epsilon_r = 6$ برابر $200 \times 10^6 v/m$ یا $200 Mv/m$ است، بدین مفهوم که برای یک قطعه از جنس میکا با

$$V_{\max} = E_{\max} \times d = 200 \times 10^6 \times 10^{-2} = 2MV$$

ضخامت ۱ cm حداکثر

۲ مگاولت قابل اعمال به قطعه خواهد بود بدون صدمه رسیدن به آن.

خازن Capacitor

قطعاتی هستند که به مجرد آنکه به ولتاژی (منبعی) متصل شوند (دو جسم هادی که در بین آنها محیط عایقی قرار گرفته) بارهایی روی سطوح این دو جسم جمع می‌شود - بار مثبت روی یکی و بار منفی به همان مقدار روی دیگری. این قطعه انرژی میدان الکتریکی را در خود ذخیره می‌کند. نسبت بار ذخیره شده به اختلاف پتانسیل بین دو جسم هادی آن مقداری است ثابت که به آن ظرفیت گویند (capacitance). این ظرفیت تنها تابع مشخصات فیزیکی قطعه است و نه کمیت‌های الکتریکی مربوطه. مانند یک خازن مسطح با سطح هادی برابر با A که بفاصله d از هم قرار گرفته‌اند و فضای بین آنها از عایقی با ضریب گذردهی ϵ پر شده و

$$c = \frac{\epsilon A}{d} \text{ می‌باشد.}$$

$$C = \frac{Q}{V}$$

$$C = \frac{\oint \vec{D} \cdot d\vec{s}}{-\int \vec{E} \cdot d\vec{l}} = \frac{\int \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{s}}{-\int \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

نحوه محاسبه ظرفیت خازنی

۱ - فرض استقرار بار $+Q$ و $-Q$ مشخص روی دو هادی خازن

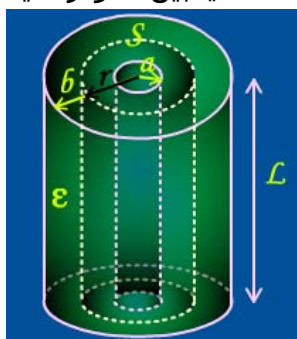
۲ - تعیین D در فضای بین دو هادی از طریق $\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$

۳ - محاسبه E از طریق $E = \frac{D}{\epsilon}$

۴ - محاسبه V بین دو هادی از طریق $V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$

۵ - جایگزینی V بدست آمده در فرمول $C = \frac{Q}{V}$

مثال: محاسبه ظرفیت خازنی يك خازن استوانه‌اي متشکل از دو استوانه هم محور بطول L و به شعاع‌هاي قاعده a و b ($b > a$) که فضای بین آن‌دو از عایقي (ϵ) پر شده است.



۱ - فرض بار $+Q$ روی استوانه داخلی و $-Q$ روی استوانه بیرونی

۲ - انتخاب سطح گاوسی استوانه‌اي به ارتفاع L و شعاع قاعده $a < r < b$

$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = +Q \Rightarrow \vec{D} = \frac{Q}{2\pi r L} \hat{a}_r$$

$$E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{Q}{2\pi \epsilon r L} \quad - ۳$$

$$V_a - V_b = V = -\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_b^a \frac{Q \hat{a}_r}{2\pi \epsilon r L} \cdot \hat{a}_r dr = \frac{Q}{2\pi \epsilon L} \ln \frac{b}{a} \quad - ۴$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi \epsilon L} \ln \frac{b}{a}} \Rightarrow C = \frac{2\pi \epsilon L}{\ln \frac{b}{a}} \quad - ۵$$

مثال: محاسبه ظرفیت خازنی کروي متشکل از دو کره هم مرکز به شعاع‌هاي a و b که فضای بین دو کره از عایقي با پرمیتیوتیه ϵ پر شده است.

۱) فرض بار مستقر روی کره داخلی $+Q$

$$۲) \oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q \Rightarrow \vec{D} = \frac{Q}{4\pi R^2} \hat{a}_R$$

$$۳) \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{Q}{4\pi \epsilon R^2} \hat{a}_R$$

$$۴) V_a - V_b = -\int_b^a \frac{Q}{4\pi \epsilon R^2} \hat{a}_R \cdot \hat{a}_R dR = \frac{Q}{4\pi \epsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$۵) C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi \epsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)} \Rightarrow C = \frac{4\pi \epsilon ab}{b - a}$$

انرژی ذخیره شده الکترواستاتیکی

می‌دانیم که کار لازم برای حرکت یک بار نقطه‌ای Q واقع در میدان الکتریکی از رابطه $W=QV$ که V اختلاف پتانسیل بین نقطه (مکان) انتهایی و ابتدایی بار Q است بدست می‌آید اگر نقطه ابتدایی در بینهایت دور (یا مبدأ پتانسیل صفر در بینهایت) در نظر گرفته باشیم V پتانسیل نقطه نهایی بار Q خواهد بود این میزان کار مذکور بصورت انرژی در سیستم ذخیره می‌شود. حال N بار گسیسته را که در فضایی مستقر شده‌اند را در نظر می‌گیریم، میزان انرژی (کار) ذخیره شده برای استقرار این بارها بقرار زیر محاسبه می‌شود.

ابتدا فرض می‌شود که هیچگونه باری وجود ندارد و بار q_1 را از بینهایت به مکان \bar{R}_1 آورده شود.

$$We_1 = 0 \quad \text{برای بار } q_1$$

$$We_2 = q_2 V_{21} \quad \text{برای بار } q_2$$

$$We_3 = q_3 V_{31} + q_3 V_{32} \quad \text{برای بار } q_3$$

$$We_N = q_N V_{N1} + q_N V_{N2} + \dots + q_N V_{N,N-1} \quad \text{و نهایتاً برای آوردن بار } q_N$$

$$\text{بنابراین کل } We = \sum_{i=1}^N We_i = 0 + q_2 V_{21} + q_3 V_{31} + q_3 V_{32} + \dots + q_N V_{N,N-1}$$

اما از طرفی

$$q_2 V_{21} = q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon |\bar{R}_2 - \bar{R}_1|} = q_1 \frac{q_2}{4\pi\epsilon |\bar{R}_1 - \bar{R}_2|} = q_1 V_{12}$$

$$q_i V_{ij} = q_j V_{ji} \quad \text{و بطور کلی}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$We_2 = q_1 V_{12}$$

$$We_3 = q_1 V_{13} + q_2 V_{23}$$

...

$$We_N = q_1 V_{1N} + q_2 V_{2N} + \dots + q_{N-1} V_{N-1,N}$$

$$\text{کل } We = 0 + q_1 V_{12} + q_1 V_{13} + \dots + q_{N-1} V_{N-1,N} \quad \text{و}$$

چنانچه We کل دو رابطه مربوطه در بالا را با هم جمع کنیم:

$$2We = q_1 V_{12} + q_2 V_{13} + q_1 V_{14} + \dots + q_1 V_{1N} \\ + q_2 V_{21} + q_2 V_{23} + q_1 V_{24} + \dots + q_2 V_{2N}$$

...

$$q_N V_{N1} + q_N V_{N2} + \dots + q_N V_{N,N-1}$$

یا :

$$2We = q_1 (V_{12} + V_{13} + \dots + V_{1N}) \\ + q_2 (V_{21} + V_{23} + \dots + V_{2N}) \\ \dots \\ + q_N (V_{N1} + V_{N2} + \dots + V_{N,N-1})$$

حال اگر V_1 را بصورت $V_1 = \sum_{i=2}^N V_{1i}$ تعریف کنیم که مجموع پتانسیل نقطه \bar{R}_1 ناشی تمام منابع (q_N, \dots, q_3, q_2) است و بطور کلی:

$$V_K = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N V_{ki} = \text{پتانسیل نقطه } k \text{ ام ناشی از تمام بارهای موجود به جز } q_k$$

$$2We = q_1 V_1 + q_2 V_2 + \dots + q_N V_N$$

$$We = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i$$

و برای یک توزیع بار پیوسته حجمی به چگالی P

$$We = \frac{1}{2} \int_V \rho(\bar{R}') V(\bar{R}') dV'$$

می‌توان ثابت کرد که:

$$We = \frac{1}{2} \int_V \bar{D} \cdot \bar{E} dv'$$

$$We = \frac{1}{2} \int \epsilon E^2 dv' = \frac{1}{2} \int \frac{D^2}{\epsilon} dV' = \frac{1}{2} \int D E dv'$$

نیروی الکترواستاتیکی

- برای یک سیستم بسته طبق اصل بقا انرژی

$$\Delta W + \Delta We = 0$$

$$\Delta W = -\Delta We$$

میزان انرژی تغییر یافته بدلیل اعمال نیروی F که سبب جابجایی Δl می‌شود:

$$\Delta W = F \Delta l$$

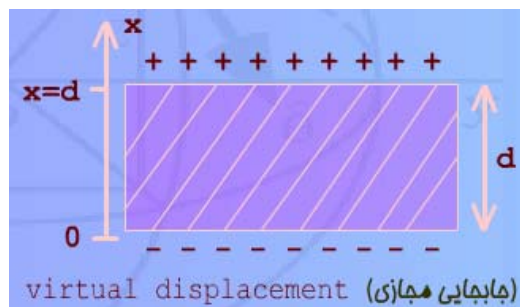
$$F = \frac{\Delta W}{\Delta l}$$

$$\Rightarrow F = -\frac{\Delta We}{\Delta l} \Rightarrow \bar{F}|_{Q=cte} = -\nabla We$$

مانند: یک خازن که بار $+Q$ و $-Q$ روی صفحات آن ذخیره شده و اتصالی با بیرون (یک منبع بیرونی) ندارد یعنی Q ثابت است و در نتیجه یک سیستم بسته را بوجود آورده بنابراین:

$$\bar{F}|_{Q=cte} = -\nabla W_e|_{Q=cte} = -\nabla \left(\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \right)$$

$$C = \epsilon \frac{A}{x}$$



$dx = \text{virtual displacement}$ (جابجایی مجازی)

$$F_y = F_z = 0, \quad F_x = -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \frac{Q^2}{c} \right) = -\frac{d}{dx} \left(\frac{Q^2 x}{2\epsilon A} \right)$$

$$F_x = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon A}$$

$$\Delta W = \Delta W_e$$

- برای يك سیستم باز

بنابراین

$$\Delta W = F \Delta l \Rightarrow F = \frac{\Delta W}{\Delta l} = \frac{\Delta W_e}{\Delta l}$$

$$\vec{F}|_{V=cte} = \nabla W_e$$

مانند يك خازن كه به منبعي با ولتاژ ثابت V متصل گشته است و هر تغيير در انرژی موجود از منبع تأمین می‌شود.

$$\vec{F}|_{V=cte} = \nabla W_e = \nabla \left(\frac{1}{2} c V^2 \right) \quad C = \epsilon \frac{A}{x}$$

$$F_x = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (c V^2) = \frac{V^2}{2} \frac{d}{dx} \left(\epsilon \frac{A}{x} \right) = \frac{V^2}{2} \left[-\frac{\epsilon A}{x^2} \right]$$

$$F_x = -\frac{1}{2} V^2 \frac{\epsilon^2 A^2}{x^2 \epsilon A} = -\frac{1}{2} \frac{V^2 C^2}{\epsilon A} = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon A}$$

كه همان جواب حالت قبل است.

نکته: در خصوص وضعیت خطوط میدان در يك خازن چنانچه فاصله بين دو هادي نسبت به ساير ابعاد خازن كوچك نباشد، میدان در فضاهای بين دو هادي يکنواخت نخواهد بود و میدان در رفتگی پیدا خواهد کرد يعني خطوط میدان در نقاط كناري نسبت به نقاط میانی قطعه (خازن) انحراف خواهد داشت كه به این می دان Fringing Field گویند (فوران میدان)

